

 MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin	 
---	--

Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a IX-a

Barem de evaluare și notare.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1. (a) Determinați numerele întregi k pentru care ecuația $|x-3|+|x+1|=k$, are exact două soluții întregi.

(b) Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x + y = 4$, atunci $\sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} \leq 2$.

(Supliment GM 10/2023, enunț ușor modificat)




Soluție:

<p>a) Pentru $x \in (-\infty, -1)$ se obține $x_1 = \frac{2-k}{2}$, unde $k > 4$. Pentru $x \in [-1, 3]$ ecuația devine $k = 4$ și are deci 5 soluții întregi, pentru $k \in (3, \infty)$ avem $x_2 = \frac{k+2}{2} > 3$ dacă $k > 4$. Se obține $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2$, pentru $k = 2p, p \in \mathbb{N}, p \geq 3$</p>	4p
<p>b) $\sqrt{1 \cdot (x-3)} + \sqrt{1 \cdot (y+1)} \leq \frac{1+x-3}{2} + \frac{1+y+1}{2} = 2$ Orice altă soluție corectă se punctează la maxim</p>	3p

Problema 2. Arătați că, dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are termenii strict pozitivi și

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \frac{2n+1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ atunci } (a_n)_{n \geq 1} \text{ este o progresie aritmetică.}$$

(Concurs Viitori Olimpici.ro, 2022)

 MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin	 
---	--

Soluție:

Notăm $a_1 = a$ și se obține imediat $a_2 = 2a, a_3 = 3a, \dots$	3p
Se demonstrează inductiv că $a_n = n \cdot a, \forall n \geq 1$	3p
$a_{n+1} - a_n = a, \forall n \geq 1$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.	1p

Problema 3. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ este adevărată inegalitatea

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}.$$

(Supliment GM 11/2023)

Soluție:

Notăm $x_k = 2k + 1, k \geq 1$ și inegalitatea mediilor conduce la $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \frac{n-1}{s_n}$, de unde:	3p
$s_n \geq \frac{(n-1)^2}{n^2-1} = \frac{n-1}{n+1} > \frac{n-1}{n+2}$	4p

Problema 4. Fie punctul P în planul triunghiului ABC , pentru care $a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + c \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde $BC = a, AC = b, AB = c$. Arătați că P este intersecția dintre mediana din B și bisectoarea interioară a unghiului C .

(Supliment GM 11/2023)

Soluție:

Notăm cu D mijlocul lui AC și deci	1p
--	----



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})$	
Cum $\overrightarrow{PB} = \frac{-a}{b}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})$ avem $\overrightarrow{PD} = \frac{-b}{2a}\overrightarrow{PB}$, deci P, D, B sunt coliniare (1)	2p
Dacă $E \in (AB)$ și (CE) este bisectoare, atunci, $\frac{AE}{EB} = \frac{b}{a}$ și $\overrightarrow{PE} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{PA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{PB} \Rightarrow$	2p
$(a+b)\overrightarrow{PE} = a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} = -a\overrightarrow{PC}$ deci P, E, C sunt coliniare (2)	1p
Din (1) și (2); $BD \cap CE = \{P\}$	1p